Janvier 2019

Gestion du spectre et télécommunications

Énoncés mathématiques liés à la détermination des prix et à la nomination des gagnants lors d’enchères combinatoires au cadran pour la bande de 600 MHz

Avis d’ISDE : Le présent document a été rédigé par Power Auctions LLC pour ISDE. Son contenu définit clairement le processus de fixation des prix et de nomination des gagnants tel que décrit dans le document SLPB-002-18, *Cadre technique, politique et de délivrance de licences concernant le spectre de la bande de 600 MHz*.

Table des matières

1. Objet

1. Le présent document formule de manière concise les problèmes de processus et d'optimisation résolus aux étapes de l'attribution et de l'assignation lors d'enchères combinatoires au cadran (ECC). Un aperçu de ces sujets est présenté aux annexes C et F du document SLPB-002-18, *Cadre technique, politique et de délivrance de licences concernant le spectre de la bande de 600 MHz*, ci-après nommé Cadre concernant la bande de 600 MHz. La notation est basée sur le document de 2012 intitulé *Quadratic Core-Selecting Payment Rules for Combinatorial Auctions*[1] de R.W. Day et P. Cramton.

2. L'optimisation est utilisée avec le processus des ECC dans les exemples suivants : pour déterminer les soumissions retenues et les prix à payer à la fin de l'étape de l'attribution et à la fin de chaque ronde d'assignation. La manière de déterminer les gagnants à la fin de l'étape de l'attribution (voir paragraphes 43 à 47) et à la fin de chaque ronde d'assignation (voir paragraphes 53 à 63) est expliquée à l'annexe C du Cadre concernant la bande de 600 MHz. Le processus de détermination des prix à la fin de l'étape de l'attribution (paragraphes 1 à 8) et à la fin de chaque ronde d'assignation (paragraphes 19 à 24) est expliqué à l'annexe F du même document, et donne aussi un exemple illustrant le processus de détermination des prix (paragraphe 10 à 18).

2. Détermination des soumissions retenues à l'étape de l'attribution

3. Toutes les soumissions valides reçues lors des rondes au cadran et de la ronde supplémentaire sont examinées en vue de la détermination des soumissions retenues à la fin de l'étape de l'attribution. De plus, une mise à prix pour chaque licence, au prix de départ, sera incluse dans la détermination des soumissionnaires retenus à la fin de l'étape de l'attribution. Lors de ce processus, ISDE agira comme s'il était soumissionnaire pendant les enchères en faisant une soumission pour chaque licence au prix de départ. L'inclusion d'une mise à prix pour chaque licence a pour but de garantir que le montant supplémentaire qu'un soumissionnaire paiera pour une licence additionnelle est au moins égal au prix de départ de la licence. Les mises à prix ne seront pas traitées de façon globale, mais plutôt comme ayant été faites par différents soumissionnaires, de manière que tout nombre de mise à prix puisse être sélectionné à partir de la combinaison retenue. Plus précisément, dans chaque zone de service, il y aura sept mises à prix distinctes, chacune pour une licence réservée.

4. Un algorithme sera utilisé pour déterminer la combinaison de soumissions valides qui a la valeur la plus élevée, sous réserve que chaque soumissionnaire gagne au plus un de ses ensembles. Le nombre de blocs ouverts attribués dans une zone de service ne doit pas dépasser quatre et le total de blocs ouverts et de blocs réservés dans une zone de service ne doit pas dépasser sept. Veuillez noter qu'il est possible d'attribuer plus de trois blocs réservés à un soumissionnaire admissible aux blocs réservés dans une zone de service.

[1] Robert W. Day et Peter Cramton, « Quadratic Core-Selecting Payment Rules for Combinatorial Auctions », *Operations Research* 60, 3 (mai-juin 2012), p. 588 à 603 (en anglais seulement)

2. 1 Définitions pour l'étape de l'attribution

- Soit A, une zone de service.
- Soit N, l'ensemble des soumissionnaires.
- Soit D_i, le groupe de soumissionnaires qui ne sont pas admissibles aux blocs réservés dans la zone de service i.
- Soit S, un ensemble (vecteur) qui précise la quantité de blocs dans chaque zone de service. Pour chaque zone de service i, S_i précise le nombre de blocs dans la zone de service i qui sont inclus dans l'ensemble S. Pour les soumissionnaires qui ne sont pas admissibles aux blocs réservés, S_i représente le nombre de blocs ouverts dans la zone de service i. Pour les soumissionnaires admissibles aux blocs réservés, S_i représente le nombre de blocs réservés dans la zone de service i.
- Soit F_j, le groupe d'ensembles non nuls réalisables pour le soumissionnaire j. C'est à dire l'ensemble $S \in F_j$ si $S_i \leq 4$ pour chaque zone de service i où le soumissionnaire j n'est pas admissible aux blocs réservés, $S_i \leq 7$ pour chaque zone de service i où le soumissionnaire j est admissible aux blocs réservés, et $S_i > 0$ pour au moins une zone de service.
- Pour un soumissionnaire j et un ensemble S, définissons $b_j(S)$ comme le montant de la soumission de j pour S. Le groupe complet de soumissions (y compris les ensembles et les montants en dollars) de tous les soumissionnaires correspond à b.

2.2 Détermination des soumissionnaires retenus à l'étape de l'attribution

5. Étant donné un groupe de soumissionnaires N et des soumissions b, la détermination des soumissionnaires retenus à l'étape de l'attribution permet d'établir la combinaison de soumissions valides qui a la valeur la plus élevée, permettant ainsi à chaque soumissionnaire de gagner au plus un de ses ensembles de soumissions, de ne pas dépasser la quantité de quatre blocs ouverts attribués dans une zone de service et de ne pas dépasser le total de sept blocs ouverts et de blocs réservés dans une même zone de service. Ainsi, la détermination des soumissionnaires retenus (*wd*) correspond à l'optimisation binaire suivante :

$$wd\left(N,b\right) = \max \sum_{j \in N} \sum_{S \in F_j} b_j\left(S\right) \cdot x_j\left(S\right)$$

$$\text{assujetti à :} \qquad \sum_{S \in F_j} x_j\left(S\right) \leq 1 \qquad \forall j \in N \tag{1}$$

$$\sum_{j\in D_i}\sum_{S\in F_j} S_i \cdot x_j\left(S\right) \le 4 \qquad \forall i \in A \tag{2}$$

$$\sum_{j\in N}\sum_{S\in F_j} S_i \cdot x_j\left(S\right) \le 7 \qquad \forall i \in A \tag{3}$$

$$x_j(S) \in \{0,1\} \qquad \forall j \in N, \forall S \in F_j \tag{4}$$

où :

- $x_j(S)=1$ indique que le soumissionnaire j gagne l'ensemble S;
- $x_j(S)=0$ indique que le soumissionnaire j ne gagne pas l'ensemble S.

6. La fonction objectif consiste à optimiser la valeur (c.-à-d. le montant total en dollars) des soumissions retenues.

7. La contrainte (1) exige que pour chaque soumissionnaire j, le nombre total de ses soumissions gagnantes soit égal à 0 ou 1; ce qui signifie que le soumissionnaire j, peut gagner au plus un seul de ses ensembles.

8. La contrainte (2) exige que pour chaque zone de service i, la quantité de blocs ouverts attribués ne dépasse pas quatre (soit le nombre maximum de blocs ouverts dans une zone de service).

9. La contrainte (3) exige que pour chaque zone de service i, le total des blocs ouverts et des blocs réservés ne dépasse pas sept, ou en d'autres termes, que chaque bloc d'une zone de service ne soit attribué qu'une seule fois.

10. La contrainte (4) exige que $x_j(S)$ soit binaire, ce qui signifie que le soumissionnaire j obtient l'ensemble S ou non; il n'est pas possible qu'il ne gagne qu'une partie d'un ensemble.

11. Soit $W(N,b)$, l'ensemble des soumissionnaires retenus déterminé par N et b :

$$W\left(N,b\right) = \{ j \in N \mid \exists\ S_j \in F_j \text{ such that } x_j(S_j)=1\} \tag{5}$$

où :

- $j \in W(N,b)$ représente un soumissionnaire gagnant donné;
- S_j est l'ensemble unique non nul que le soumissionnaire $j \in W\left(N,b\right)$ gagne (c.-à-d. $x_j(S_j)=1$).

12. Si une seule combinaison de soumissions valides produit la combinaison ayant la plus haute valeur, cette combinaison constitue le résultat qui détermine les offres globales retenues et les soumissionnaires gagnants. Dans le cas contraire, des règles sont appliquées pour briser l'égalité et

garantir qu’une solution unique soit trouvée. Une fois que la valeur objective optimale a été trouvée, c’est-à-dire une fois que la combinaison de soumissions ayant la plus haute valeur a été déterminée, il faut remplacer la fonction objectif par la fonction objectif de bris d’égalité et introduire une contrainte garantissant que la valeur objective optimale sera atteinte. Cette opération est effectuée dans l’ordre pour chaque règle de bris d’égalité. Les règles de bris d’égalité sont les suivantes :

- minimiser le nombre de licences qui font partie de l’ensemble du soumissionnaire à la ronde finale au cadran, mais qui n’ont pas été gagnées par le soumissionnaire dans une combinaison de soumissions donnée;
- maximiser la quantité de spectre attribuée et mesurée d’après les points d’admissibilité;
- maximiser la somme des produits de l’admissibilité totale par les nombres aléatoires associés à chaque soumission gagnante.

13. En plus de déterminer les soumissions gagnantes, le processus de désignation des gagnants décrit au paragraphe 5 appliqué à un groupe de soumissions modifié est utilisé à plusieurs reprises pour déterminer les prix Vickrey et les prix de base.

3. Détermination des prix de base à l’étape de l’attribution

14. Cette section correspond à l’annexe C (paragraphes de 48 à 50) et à l’annexe F (paragraphes de 2 à 9) du Cadre concernant la bande de 600 MHz.

15. Le prix de base représente le montant minimum qu’un soumissionnaire retenu paiera pour son ensemble de blocs génériques. Le prix de base ne comprend pas le montant additionnel ou supplémentaire que pourrait payer un soumissionnaire retenu pour des licences particulières accordées à l’étape de l’assignation. Le prix de base est déterminé en utilisant toutes les soumissions valides faites par tous les soumissionnaires à l’étape de l’attribution. Un prix de base distinct est établi pour chaque soumissionnaire gagnant.

16. ISDE utilisera une règle du deuxième prix pour calculer les prix de base, de sorte que le prix de base pour un soumissionnaire gagnant soit au moins égal à la somme des prix de départ, sans être supérieur au montant réel de la soumission. Les deuxièmes prix sont souvent appelés prix Vickrey et représentent le coût d’opportunité pour l’ensemble du soumissionnaire gagnant. Plus précisément, ISDE appliquera les prix de base optimaux pour les soumissionnaires et utilisera la « méthode Vickrey de calcul du prix le plus proche » pour déterminer les prix de base.

17. Le prix Vickrey pour chaque soumissionnaire *j* se calcule comme suit. Premièrement, la soumission gagnante *j* du soumissionnaire (valeur A) est soustraite de la valeur de la combinaison gagnante d’ensembles. Ensuite, la valeur de la combinaison gagnante d’ensembles est recalculée selon l’hypothèse où toutes les soumissions du soumissionnaire *j* seraient exclues, comme si le soumissionnaire *j* n’avait pas participé aux enchères (valeur B). Le prix Vickrey pour le soumissionnaire *j* se définit comme étant la valeur de la combinaison gagnante d’ensembles une fois que toutes les soumissions du soumissionnaire *j* ont été exclues (valeur B), moins le total des soumissions gagnantes à l’étape de l’attribution pour tous les soumissionnaires sauf pour le soumissionnaire *j* (valeur A), c’est-à-dire B−A.

18. Parfois, un paiement en sus du prix Vickrey est exigé dû à des éléments complémentaires des soumissionnaires. Si un paiement additionnel est requis, ce dernier sera ajusté proportionnellement à

la taille de l'ensemble du soumissionnaire, telle que mesurée par l'ensemble du soumissionnaire gagnant évalué aux prix de départ. La procédure permettant de calculer ce paiement additionnel se nomme la méthode du rajustement sélectif.

19. L'ensemble des prix de base pour les soumissions gagnantes à l'étape de l'attribution doit satisfaire aux quatre conditions ci-dessous.

a) **Première condition :** Le prix de base pour gagner une soumission à l'étape de l'attribution doit être supérieur ou égal aux prix de départ des licences incluses dans l'ensemble associé à la soumission retenue, mais pas plus élevé que le montant en dollars de la soumission gagnante.

b) **Deuxième condition :** Le groupe des prix de base doit être suffisamment élevé pour qu'aucun autre soumissionnaire ou groupe de soumissionnaires ne soit prêt à payer davantage que tout soumissionnaire gagnant ou groupe de soumissionnaires gagnants. Si un seul groupe de prix de base satisfait à la première et à la deuxième condition, c'est ce groupe qui détermine les prix de base pour l'étape de l'attribution.

c) **Troisième condition :** Si plusieurs groupes de prix de base satisfont à la première et à la deuxième condition, le ou les groupes de prix de base qui minimisent la somme des prix de base pour toutes les soumissions gagnantes est ou sont choisis. Si un seul groupe de prix de base satisfait aux trois conditions, c'est ce groupe qui détermine les prix de base pour l'étape de l'attribution.

d) **Quatrième condition :** Si plus d'un groupe de prix de base satisfont aux trois premières conditions, le groupe de prix de base qui minimise la somme pondérée des carrés des différences entre les prix de base et les prix Vickrey est sélectionné. La pondération est basée sur le prix de l'ensemble du soumissionnaire évalué aux prix de départ. Cette méthode pour choisir entre des groupes de prix de base qui minimisent la somme des prix de base concernant toutes les soumissions gagnantes s'appelle la « méthode Vickrey de calcul du prix le plus proche ».

3.1 Définitions préliminaires

20. Soit $b_j^* = b_j(S_j)$, signifiant le montant de la soumission gagnante du soumissionnaire gagnant $j \in W(N,b)$ et b^* signifiant le vecteur composé des montants de la soumission retenue.

21. Soit $p = p(N,b)$, signifiant un vecteur de prix génériques pour les soumissionnaires gagnants dans $W(N,b)$ où N est l'ensemble complet des soumissionnaires et b l'ensemble initial des soumissions présentées. De plus, soit l'équation

$$|p| = \sum_{j \in W(N,b)} p_j(N,b)$$

servant à calculer la somme des prix pour les gagnants dans $W(N,b)$.

22. Les prix Vickrey retranchent de chaque soumission gagnante la somme que le soumissionnaire gagnant contribue à la valeur totale de la combinaison gagnante. Pour un soumissionnaire gagnant

donné, cette contribution est déterminée au moyen d'une détermination hypothétique des gagnants après exclusion du soumissionnaire. La différence entre la valeur totale de la combinaison gagnante incluant le soumissionnaire j et la valeur totale de la combinaison gagnante excluant toutes les soumissions du soumissionnaire j correspond à la contribution du soumissionnaire j à la valeur totale de la combinaison gagnante, et c'est cette contribution qui sert à déterminer la valeur à retrancher pour établir les prix Vickrey.

23. Chaque soumissionnaire gagnant j bénéficie de la réduction suivante sur la valeur de ses soumissions gagnantes :

$$d_j = wd(N,b) - wd(N \setminus \{j\},b) \tag{6}$$

où $wd\left(N \setminus \{j\},b\right)$ est la valeur de la combinaison gagnante une fois que toutes les soumissions du soumissionnaire j ont été exclues.

24. Les prix Vickrey p^0 se calculent en appliquant la réduction à la valeur des soumissions gagnantes de chaque soumissionnaire gagnant, comme suit :

$$p_j^0 = b_j^* - d_j \tag{7}$$

où p_j^0 est le prix Vickrey du soumissionnaire j retenu et d_j est la réduction que le soumissionnaire j retenu peut appliquer au montant b_j^* de sa soumission gagnante.

25. Le prix Vickrey pour chaque soumissionnaire j retenu peut également se calculer comme suit. Premièrement, la soumission gagnante du soumissionnaire j est soustraite de la valeur de la combinaison gagnante d'ensembles $\left(wd\left(N,b\right)-b_j^*\right)$. Ensuite, on recalcule la combinaison d'ensembles gagnante dans la situation hypothétique où toutes les soumissions du soumissionnaire j ont été exclues, comme si le soumissionnaire j n'avait pas participé aux enchères, c'est-à-dire $wd\left(N \setminus \{j\},b\right)$. Le prix Vickrey pour le soumissionnaire j se définit comme la valeur maximum du montant de la soumission une fois que les soumissions du soumissionnaire j ont été retirées, moins la valeur des soumissions gagnantes à l'étape de l'attribution pour tous les soumissionnaires autres que le soumissionnaire j. Cette méthode de calcul équivaut à celle décrite dans les équations (6) et (7).

$$p_j^0 = b_j^* - d_j \tag{8}$$

$$p_j^0 = b_j^* - \left(wd\left(N,b\right) - wd\left(N \setminus \{j\}, b\right)\right) \tag{9}$$

$$p_j^0 = wd\left(N \setminus \{j\}, b\right) - wd\left(N,b\right) + b_j^* \tag{10}$$

$$p_j^0 = wd\left(N \setminus \{j\}, b\right) - \left(wd\left(N,b\right) - b_j^*\right) \tag{11}$$

3.2 Ajustement sélectif des prix de base

26. Un paiement en sus du prix Vickrey est parfois exigé dû à des éléments complémentaires des soumissionnaires, et ce, pour satisfaire à la seconde condition (paragraphe 19-b) selon laquelle les prix de base doivent être suffisamment élevés pour qu'il n'y ait pas d'autres soumissionnaires ou d'autres groupes de soumissionnaires qui sont prêts à payer davantage que l'un des soumissionnaires ou des groupes de soumissionnaires gagnants. On appelle coalition de blocage tout soumissionnaire ou groupe de soumissionnaires qui est prêt à payer davantage que tout soumissionnaire ou groupes de soumissionnaires gagnants. Le groupe qui est prêt à payer le montant le plus élevé constitue la première coalition de blocage. Pour dissoudre une coalition de blocage, il suffit d'augmenter les prix de base de sorte que la somme totale payée par les soumissionnaires gagnants ne soit pas inférieure à la somme totale que la coalition de blocage est prête à payer. Si d'autres coalitions de blocage se forment une fois que les prix de base ont été ajustés pour dissoudre la première coalition, les autres coalitions qui pourraient surgir sont dissoutes à tour de rôle du fait de l'augmentation des prix de base jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de soumissionnaires individuels ou de groupes de soumissionnaires qui soient prêts à renchérir.

27. Le calcul des prix de base peut se faire itérativement grâce à un ajustement sélectif. L'ajustement sélectif consiste à prendre les prix Vickrey comme point de départ et à ajuster itérativement les prix de base jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de soumissionnaires ou de groupes de soumissionnaires qui soient prêts à payer davantage que le groupe de prix de base existant. Pour cela, on regroupe les contraintes de prix qui s'appliquent à chaque coalition de blocage et on cherche à respecter les contraintes de prix en sélectionnant les prix de base qui réduisent l'écart pondéré entre les prix de départ et les prix Vickrey.

28. Soit p^n désignant le vecteur de prix défini pour l'itération de l'ajustement sélectif des prix de base n dont la composante p_j^n représente le prix à jour du soumissionnaire retenu *j* après itération *n*. Les prix Vickrey sont représentés par p^0 dans cet algorithme. Étant donné le vecteur p^n de l'itération n et l'ensemble initial de soumissions présentées b, il est possible d'obtenir comme suit un ensemble réduit de soumissions b^n en soustrayant le surplus existant du soumissionnaire j de chaque offre b_j :

$$b_j^n(S) = b_j(S) - \left(b_j^* - p_j^n\right) = b_j(S) - b_j^* + p_j^n \tag{12}$$

29. Lorsqu'un soumissionnaire j est perdant, mais qu'il est toujours prêt à payer la valeur totale

de ses soumissions (puisque le surplus de tout soumissionnaire perdant est nul) afin de faire partie d'une coalition de blocage, alors : $b_j^n(S) = b_j(S)$ pour tous les S. Un soumissionnaire gagnant j, quant à lui, ne paiera sa soumission gagnante S_j ni plus cher ni moins cher que son prix au moment de l'itération n pour faire partie de la coalition de blocage $b_j^n(S_j) = p_j^n$.

30. Soit $C^n = W(N, b^n)$, un des groupes des gagnants dans la détermination hypothétique des gagnants comportant les soumissionnaires de l'ensemble N et un ensemble réduit de soumissions b^n. Ces gagnants forment la coalition de blocage soumise à l'itération n. Parmi toutes les coalitions de blocage possibles soumises à l'itération n, C^n est celle qui a la plus haute valeur.

31. Soit β^n, un vecteur indexé des coalitions de blocage dont les composantes sont représentées par $\beta_{C^n}^n$. Pour chaque coalition, ce vecteur représente la somme des prix de base requis pour dissoudre la coalition :

$$\beta_{C^n}^n = wd(C^n, b) - \sum_{j \in C^n} b_j^* \tag{13}$$

où :

- $wd\left(C^n, b\right)$ est la valeur totale que les soumissionnaires de la coalition de blocage C^n peuvent atteindre sans faire appel à des soumissionnaires n'appartenant pas à la coalition, ou à $N \setminus C^n$;
- $\sum_{j \in C^n} b_j^*$ est la somme des soumissions gagnantes des premiers soumissionnaires gagnants qui font partie de la coalition C^n.

32. Soit H^n une matrice dans laquelle les colonnes sont indexées en fonction des coalitions de blocage et où chaque colonne h_{C^n} est le vecteur caractéristique de l'ensemble complémentaire des gagnants :

$$h_{C^n, j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in C^n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{14}$$

où :

- $h_{C^n, j} = 0$ indique qu'un soumissionnaire donné j fait partie de la coalition C^n;
- $h_{C^n, j} = 1$ indique qu'un soumissionnaire donné j devrait faire rajuster son prix de base pour

dissoudre la coalition.

33. Trouvons μ^n , le cumul minimum des prix de base requis pour dissoudre toutes les coalitions au moment de l'itération n , en optimisant le vecteur de prix p comme suit :

$$\begin{aligned} \mu^n = \quad & \min |p| \\ \text{assujetti à} \quad & pH^n \geq \beta^n \\ & p^0 \leq p \leq b^* \end{aligned} \tag{15}$$

34. La première contrainte, $pH^n \geq \beta^n$, exige que toutes les coalitions soient dissoutes, c'est-à-dire que le cumul des prix de base payés par les soumissionnaires gagnants soit au moins égal à la somme des prix de base requise pour dissoudre les coalitions. La seconde contrainte, $p^0 \leq p \leq b^*$, exige que le prix payé par chaque soumissionnaire gagnant ne dépasse pas le prix soumissionné pour l'ensemble gagnant et ne soit pas inférieur au prix Vickrey.

35. Il reste maintenant à mettre à jour les prix que devront payer les soumissionnaires gagnants pour que leur somme soit égale à μ^n (troisième condition); de manière que le prix payé collectivement par les soumissionnaires gagnants soit assez élevé pour qu'aucun autre soumissionnaire ou groupe de soumissionnaires ne veuille renchérir.

36. S'il y a plus d'un groupe de prix de base dont la somme est égale à μ^n , l'algorithme sélectionne le groupe de prix de base qui réduit la somme pondérée des carrés des écarts entre les prix de base et les prix Vickrey. La pondération est basée sur le prix de l'ensemble du soumissionnaire qui a été évalué aux prix de départ (quatrième condition).

37. Soit $o(S_j)$, le prix de l'ensemble de chaque soumissionnaire gagnant évalué aux prix de départ.

38. Trouvons ensuite les prix révisés p^{n+1} comme solution optimale de :

$$\min \sum_{j \in W(N,b)} \frac{(p_j^{n+1} - p_j^0)^2}{o(S_j)} \tag{16}$$

assujetti à :

$$p^{n+1}H^n \geq \beta^n \tag{17}$$

$$p^0 \leq p^{n+1} \leq b^* \tag{18}$$

$$\left|p^{n+1}\right| = \mu^n \tag{19}$$

39. Ce problème quadratique réduit la somme pondérée des carrés des écarts entre les prix de base révisés p^{n+1} , où les prix révisés sont ceux dont la somme est égale à μ^n , et les prix Vickrey p^0

(quatrième condition). Les deux premières contraintes sont identiques à celles des problèmes d'optimisation (15). La troisième contrainte, $\left|p^{n+1}\right| = \mu^n$, garantit que les prix correspondent à la somme minimale des prix de base permettant de dissoudre toutes les coalitions.

40. Soit $p^* = p^n$, où n est la plus petite valeur de sorte que la valeur de la coalition ne dépasse pas la somme des prix de base : $wd(N, b^n) \leq \left|p^n\right|$. Au moment de l'itération p^*, il n'y aura plus de coalitions de blocage. Alors, les prix de base correspondent à p^*.

4. Détermination des soumissions retenues à la fin de chaque ronde d'assignation

41. Les licences génériques sont des blocs de spectre qui sont de valeur comparable et se ressemblent suffisamment pour être offertes dans une seule catégorie. À chaque ronde d'assignation, les soumissionnaires gagnants font des soumissions additionnelles, exprimant ainsi leurs préférences pour certaines fréquences particulières parmi les licences génériques qu'ils ont gagnées.

42. Un algorithme servira à déterminer la combinaison d'assignations particulières de licences qui produit la valeur de soumission la plus élevée. En cas d'égalité, c'est-à-dire si au moins deux assignations données produisent la même valeur totale, l'égalité sera brisée en choisissant l'assignation qui maximise la somme des nombres aléatoires associée aux soumissions gagnantes.

4.1 Définitions pour une ronde d'assignation

- Soit L, l'ensemble des blocs des fréquences spécifiques qui seront attribués pendant une ronde d'assignation. C'est-à-dire L, qui comprend les blocs A, B, C, D, E, F et G.
- Soit N, l'ensemble des soumissionnaires qui ont gagné au moins une licence générique pendant l'étape de l'attribution dans la ou les zones de service à assigner pendant la ronde d'assignation.
- Soit S, un ensemble (vecteur) de blocs. Pour chaque bloc $i \in L$, $S_i = 1$ si le bloc i fait partie de l'ensemble S, et $S_i = 0$ si le bloc i ne fait pas partie de l'ensemble S. Veuillez noter que chaque option de soumission pour la ronde d'assignation peut être représentée comme un ensemble de blocs.
- Soit F_j, l'ensemble des options de soumission contiguës qui sont conformes aux gains d'un soumissionnaire j à l'étape d'attribution.
- Pour un soumissionnaire j et un ensemble S, définissons $b_j(S)$ comme étant le montant de la soumission de j pour S. Ainsi, b représente un groupe de soumissions. Le montant de la soumission est égal à 0 pour chaque option de soumission $S \in F_j$ pour laquelle le soumissionnaire j n'a pas présenté de soumission pendant la ronde d'assignation.

4.2 Détermination des soumissionnaires retenus pendant la ronde d'assignation

43. Le mode de détermination des gagnants des rondes d'assignation diffère de celui de l'étape de l'attribution, car chaque soumissionnaire doit gagner un seul ensemble et qu'on ne tiendra pas compte à cette étape de la distinction entre les types de soumissionnaires (admissibles ou non aux blocs réservés).

$$wd'(N,b) = \max \sum_{j \in N} \sum_{S \in F_j} b_j(S) \cdot x_j(S)$$

assujetti à :

$$\sum_{S \in F_j} x_j(S) = 1 \qquad \forall j \in N \tag{20}$$

$$\sum_{j \in N} \sum_{S \in F_j} S_i \cdot x_j(S) \leq 1 \qquad \forall i \in L \tag{21}$$

$$x_j(S) \in \{0,1\} \qquad \forall j \in N, \forall S \in F_j \tag{22}$$

44. La contrainte (20) exige que chaque soumissionnaire j se voie assigner exactement une de ses options de soumission.

45. La contrainte (21) exige que chaque bloc dans une zone de service soit assigné une seule fois.

46. La contrainte (22) exige que $x_j(S)$ soit binaire, ce qui signifie que le soumissionnaire j gagne l'ensemble S ou non.

5. Détermination des prix à l'étape de l'assignation

47. ISDE appliquera les prix de base optimaux pour les soumissionnaires et utilisera la « méthode Vickrey de calcul du prix le plus proche » pour déterminer les prix à l'étape de l'assignation. Si un paiement additionnel au-delà des prix Vickrey est nécessaire, le calcul du paiement additionnel à verser par chaque soumissionnaire retenu sera pondéré selon la taille relative de l'ensemble pertinent dans la ronde d'assignation, évaluée selon les prix d'ouverture. Les prix d'assignation doivent respecter les conditions données au paragraphe 24 de l'annexe F du Cadre concernant la bande de 600 MHz.

48. À l'étape de l'assignation, pour respecter la règle selon laquelle chaque soumissionnaire ne gagne précisément qu'un seul ensemble, la réduction Vickrey est calculée en mettant à zéro toutes les soumissions du soumissionnaire j plutôt que de les supprimer :

$$d'_j = wd'(N,b) - wd'(N,b[j \to 0]) \tag{23}$$

où :

$$b[j \to 0]_k(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = j \\ b_k(S) & \text{sinon} \end{cases} \tag{24}$$

49. Les prix finaux lors des ECC correspondent à la somme des prix de base des licences génériques établis à l'étape de l'attribution, plus les prix des fréquences particulières établis à l'étape de l'assignation.